

Písemná práce - Skupina A

1. [15 bodů] Vypočtěte determinant matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Jedná se o matici singulární nebo regulární? Zdůvodněte. Proč je dobré to vědět?

2. [20 bodů] a) Pokud to lze, určete matici X , pro kterou platí

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

V případě, že taková matice X nelze spočítat, zdůvodněte proč.

b) Dále vyjádřete, čemu se rovná matice Y , pokud platí rovnice

$$A(Y + B) = C$$

a matice A, B, C a Y jsou vhodných rozměrů a regulární.

3. [20 bodů] Řeště soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x + y - 6z &= -10 \\ 2x + y - 5z &= -8 \\ 6x - 3y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Pokud by tyto rovnice byly rovnicemi rovin, jak byste interpretovali výsledek?

4. [5 bodů] Zvolte si dva různé nenulové vektory \vec{u} a \vec{v} v prostoru (tj. $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbf{R}^3$).
Spočtěte

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}).$$

5. [20 bodů] Napiště obecnou i parametrickou rovnici roviny ρ zadané třemi body
 $A = [0, -1, 1], B = [2, 2, 1]$ a $C = [1, 2, 4]$. Dále určete kosinus
(nebo sinus) úhlu, který svírá rovina ρ s přímkou $p : x = -1 + 2t, y = 2 + t, z = 1 - t, t \in \mathbf{R}$. A jejich průsečík, pokud existuje

6. [10 bodů] Zjistěte, zda je daná rovnice rovnicí elipsy

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 54y + 49 = 0.$$

Jde-li o elipsu, najděte její střed, poloosy, ohniska a délkovou excentricitu.

7. [10 bodů] Nakreslete graf funkce

$$y = |\log_{\sqrt{3}}(1-x) + 2|.$$